

Aufgabe 1 Definitionsmenge und Polstellen

Bestimme die Polstellen der Funktionen.

a. $f(x) = \frac{4}{x} - x - 4$

d. $f(x) = \frac{3x}{x-2} - \frac{3}{x+1}$

Polstellen:

$x = 0$

auf den HN zeichnen

$$f(x) = \frac{4}{x} + \frac{x^2}{x} - \frac{4x}{x}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 4}{x}$$

$x = 2$

$x = -1$

$$f(x) = \frac{3x(x+1) - 3(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{3x^2 + 3x - 3x + 6}{x^2 - x - 2} = \frac{3x^2 + 6}{x^2 - x - 2}$$

$NG = ZG$

Waagrechte Asymptote:

$y = 3$

b. $f(x) = \frac{4x}{x-4} - \frac{20}{x-4}$

→ schiefe Asympt.

Polstellen:

$$x = 4$$

HN:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x(x-4) - 20}{x-4} \\ &= \frac{4x^2 - 16x - 20}{x-4} \end{aligned}$$

e. $f(x) = \frac{3}{2x+2} - \frac{3}{x+3}$

$$x = -1; x = -3$$

c. $f(x) \frac{3}{x+2} + 4 - \frac{3}{x}$

f. $f(x) = \frac{1}{4x-2} - \frac{3}{x} + \frac{3}{x-3}$

$$x = -2; x = 0$$

$$x = 0; x = 3; x = 0,5$$

$$4x - 2 = 0$$

$$4x = 2 \quad | \cdot \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{2}{4} = 0,5$$

Aufgabe 2 Nullstellen

Bestimme die Nullstelle der Funktionen.

a. $f(x) = \frac{4}{x} + x - 4$

d. $f(x) = \frac{3x}{x-2} - \frac{3}{x+1}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}$$

Nullstellen: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{4}{x} + x - 4 = 0 \quad | \cdot x$$

$$\Rightarrow 4 + x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = 2$$

doppelte Nst: oVZW

$$\frac{3x}{x-2} - \frac{3}{x+1} = 0 \quad | \cdot (x-2)(x+1)$$

$$\Rightarrow 3x \cdot (x+1) - 3(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x - 3x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6 = 0$$

keine Nst!

$$b. f(x) = 4x - \frac{20}{x-4}$$

$$e. f(x) = \frac{3}{2x+2} - \frac{3}{x+3}$$

$$4x - \frac{20}{x-4} = 0 \quad | \cdot (x-4)$$

$$\Rightarrow 4x \cdot (x-4) - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 16x - 20 = 0 \quad | :4$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 5$$

$$\frac{3}{2x+2} - \frac{3}{x+3} = 0 \quad | \cdot (2x+2)(x+3)$$

$$\Rightarrow 3 \cdot (x+3) - 3 \cdot (2x+2) = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 9 - 6x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow -3x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1$$

$$c. f(x) = \frac{3}{x+2} + 4 - \frac{3}{x}$$

$$f. f(x) = \frac{3}{x} - \frac{3}{x-3} - \frac{1}{4x-2}$$

$$\frac{3}{x+2} + 4 - \frac{3}{x} = 0 \quad | \cdot (x+2) \cdot x$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x + 4 \cdot (x+2) \cdot x - 3 \cdot (x+2) = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 4x^2 + 8x - 3x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 8x - 6 = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{4} (-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)})$$

$$= \frac{1}{4} (-4 \pm \sqrt{40})$$

$$= -1 \pm \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{10}$$

$$3 \cdot (x-3)(4x-2)$$

$$- 3x \cdot (4x-2)$$

$$- 1 \cdot x \cdot (x-3) = 0$$

$$\Rightarrow 3 \cdot (4x^2 - 12x - 2x + 6)$$

$$- 3 \cdot (4x^2 - 2x)$$

$$- [x^2 - 3x] = 0$$

$$\cancel{12x^2} - 42x + 18 - \cancel{12x^2} + 6x - x^2 + 3x = 0$$

$$- x^2 - 33x + 18 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 + 33x - 18 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= 33^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)$$

$$= 1161$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} (-33 \pm \sqrt{1161})$$

Die Definitionsmenge der Funktion $f(x) = \frac{4x}{x-1} + \frac{26}{2(x+1)} - \frac{4}{2x-4}$ lautet?

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1; 4\}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{1; -1; 2\}$

Der gemeinsame Hauptnenner der Funktion $f(x) = \frac{4x}{x-1} + \frac{26}{2(x+1)} + \frac{4}{2x-4}$ ist?

$2(x-1)(x+1)(2x-4)$ $2(x-1)(x+1)$ $x(x+1)(2x-4)$

Wie lautet von $4x + \frac{2}{x+1} = 0$ die vereinfachte Gleichung nachdem mit dem Hauptnenner erweitert und gekürzt wurde?

$4x + 2$ $4x(x+1) + 2 = 0$ $4x \cdot x + 1 + 2 = 0$

0
4 / 1/2

HA - fülle alle Lücken

Zusammenfassung

* $f(x) = \frac{2x^5 + \dots}{-3x^2 + \dots}$

$$\approx -\frac{2}{3}x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$ZG > NG + 1$$

* $f(x) = \frac{x^4 + x - 1}{x^3 - 1}$

$$\approx \frac{x^4}{x^3} = x$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$ZG = NG + 1$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (x^4 - x - 1) : (x^3 - 1) = x - \frac{1}{x^3 - 1} \\ - (x^4 - x) \\ \hline - 1 \end{array}$$

linear

schiefe Asymptote:

$$y = x$$

* $ZG = NG$

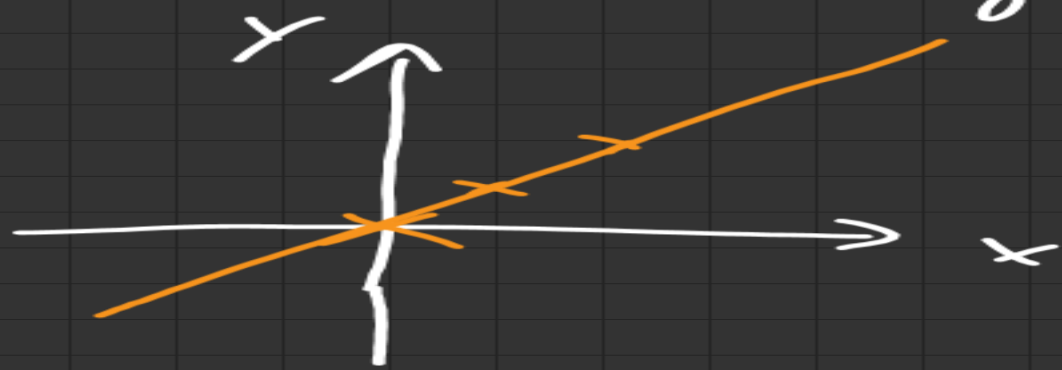
$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{4x^2 - x - 1} \approx \frac{-2x^2}{4x^2} = -0,5 \neq 0$$

Waagrechte Asymptote: $y = -0,5$

* $ZG < NG$

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1} \approx \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty$$

Waagrechte Asymptote: $y = 0$



$$y = x = 1 \cdot x + 0$$

Gib den Term einer (möglichst einfachen) gebrochen rationalen Funktion f an, die folgende Eigenschaften besitzt.

- a)
- Der Graph von f berührt die x-Achse an der Stelle $x = -1$;
 - die Funktion f hat die Polstelle $x = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} * (x+1)^2 \\ * (x-3) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-3}$$

b) Der Graph von f hat eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel bei $x_1 = 2$ und für $x \rightarrow \pm\infty$ die Asymptote $y = 0,5$

* waagrechte Asymptote: $y = 0,5$

d.h. $ZG = NG$

* $(x-2)^2$

wähle $f(x) = \frac{0,5x^2 - x + 1}{(x-2)^2}$ oder $f(x) = 0,5 \frac{x^2}{(x-2)^2}$

- c) Der Graph von f hat Polstellen mit Vorzeichenwechsel bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ und für $x \rightarrow \pm\infty$ die Asymptote $y = 0,5x - 1$

* im Nenner

$$(x-2)(x+1)$$

$$\text{d.h. } ZG = 3 = 2 + 1$$

* Ansatz mit schiefer Asymptote:

$$f(x) = 0,5x - 1 + \frac{1}{(x-2)(x+1)}$$

Beispiel zur "Division"

$$12\overset{7}{3}4 : 11 = 112 \text{ R } 2$$

$$\begin{array}{r} - 11 \\ \hline 13 \\ - 11 \\ \hline 24 \\ - 22 \\ \hline 2 \end{array}$$

↘ $\frac{1234}{11} = 112\frac{2}{11}$

HA: Erarbeite die letzten beiden Beispiele

Erinnerung:

achsensymmetrisch heißt "nur gerade Hochzahlen für x " –
also auch das Vorkommen von Konstanten ohne x : $3 = 3 \cdot x^0$

punktsymmetrisch heißt "nur ungerade Hochzahlen für x "
Überprüfen mit GeoGebra!

d) Der Graph von f hat eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x_1 = -2$, ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat für $x \rightarrow \pm\infty$ die Asymptote $y = 0$

e) Der Graph von f hat eine Polstelle bei $x_1 = 0$ und ist
achsensymmetrisch zur y -Achse.

Für $x \rightarrow \pm\infty$ hat der Graph die Asymptote $y = 0$ und bei $x_2 = 2$
befindet sich eine Nullstelle.